10 Andere continue verdelingen

In dit hoofdstuk worden andere continue verdelingen behandeld die gerelateerd zijn aan de normale verdeling. Dit zijn respectievelijk de Student's t-verdeling, de X^2-verdeling en de F-verdeling.

10.1 Student's t-verdeling

De kansdichtheidsfunctie van de Student's t-verdeling is als volgt:

$$f(t) = \frac{[(\nu-1)/2]!}{\sqrt{\nu\pi}[(\nu-2)/2]!}\left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

met π = 3,14159… en ν (Griekse letter nu) is de parameter van de Student's t-verdeling genaamd de vrijheidsgraden.

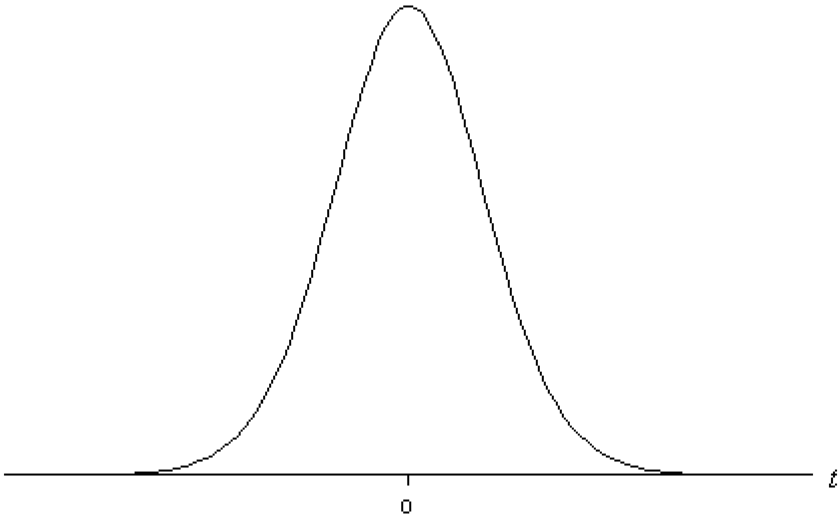
De verwachtingswaarde en de variantie van de Student's t-verdeling zijn

$$E(t) = 0$$

en

$$V(t) = \frac{\nu}{\nu-2} \text{ voor } \nu > 2$$

De onderstaande figuur beeldt een Student's t-verdeling uit. Deze verdeling heeft veel gemeen met de standaard normale verdeling. Beiden zijn symmetrisch rond de 0.



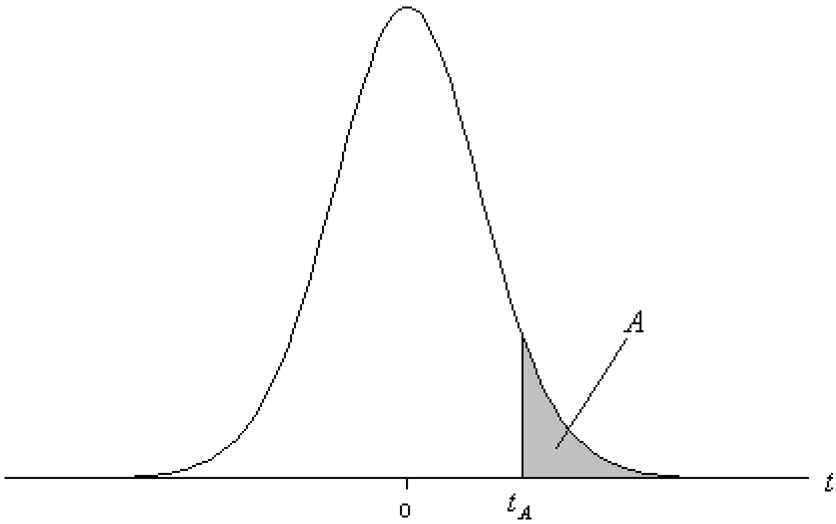
Figuur 10[a]. Student's t-verdeling (bron: www.childrensmercy.org)

Het grote verschil tussen de Student's t-verdeling en de standaard normale verdeling is dat de Student's t-verdeling een bredere grafiek heeft dan de normale verdeling. Dit komt doordat de variantie bij een standaard normale verdeling gelijk is aan 1, terwijl de variantie van een Student's t-verdeling gelijk is aan $\nu/(\nu-2)$ wat voor elke ν groter is dan 1. Als het aantal vrijheidsgraden toeneemt, zal de Student's t-verdeling meer in de buurt van de normale verdeling liggen.

Voor het vinden van de waarden van een Student's t-verdeling gebruikt men, net als bij de standaard normale verdeling, een tabel. In Appendix A2 is de tabel van de Student's t-verdeling te vinden met de waarden van $t_{A,\nu}$ die staan voor de waarden van een Student's t-verdeelde variabele met ν vrijheidsgraden, zodat

$$P(t > t_{A,\nu}) = A$$

De onderstaande figuur beeldt het bovenstaande uit.



Figuur 10[b]. Student's t-verdeling met t_A

In Appendix A2 liggen de vrijheidsgraden tussen de 1 en 200 en ook de waarden geassocieerd met oneindigheid ∞ is vermeld. Om deze tabel te lezen is het een simpele kwestie van het vaststellen van de vrijheidsgraden en het vinden van de waarden die het dichtst bij de vrijheidsgraden liggen indien het aantal vrijheidsgraden niet staat afgebeeld. De tweede stap is het opzoeken van de kolom met de gewenste t_A. Als men bijvoorbeeld de waarde van t wil weten met 10 vrijheidsgraden waar het gebied aan de rechterkant van de Student's t-curve gelijk is aan 0,05, zoekt men de 10 in de eerste kolom en in de bovenste rij $t_{0.05}$. Men vindt dan

$$t_{0.05,10} = 1{,}1812$$

Als het aantal vrijheidsgraden 25 bedraagt, krijgt men

$$t_{0.05,25} = 1.708$$

Is men op zoek naar de waarde van t met 74 vrijheidsgraden, dan rondt men naar beneden af en zoekt men naar de waarde bij 70 vrijheidsgraden (74 vrijheidsgraden staat niet vermeld in de tabel). Kortom,

$$t_{0.05,74} \approx t_{0.05,70} = 1{,}667$$

Doordat de Student's t-verdeling symmetrisch is bij de 0 is de waarde van *t* aan de linkerkant voor gebied A gelijk aan - $t_{A,\nu}$. Bijvoorbeeld, de waarde van *t* met 10 vrijheidsgraden waar het gebied aan de linkerkant gelijk is aan 0,05 is

$$-t_{0.05,10} = -1{,}812$$

In de laatste rij van de tabel is het aantal vrijheidsgraden gelijk aan oneindig. Zoals hierboven vermeld is, komt met het toenemen van het aantal vrijheidsgraden de Student's t-verdeling dichter in de buurt van de standaard normale verdeling. Daarom zijn de waarden van oneindig ∞ aantal vrijheidsgraden gelijk aan die van de standaard normale verdeling (de waarden van *z*). In de tabel hieronder staan een aantal veel voorkomende waarden van *z* tegenover bijna corresponderende waarden van *t* met een oneindig aantal vrijheidsgraden.

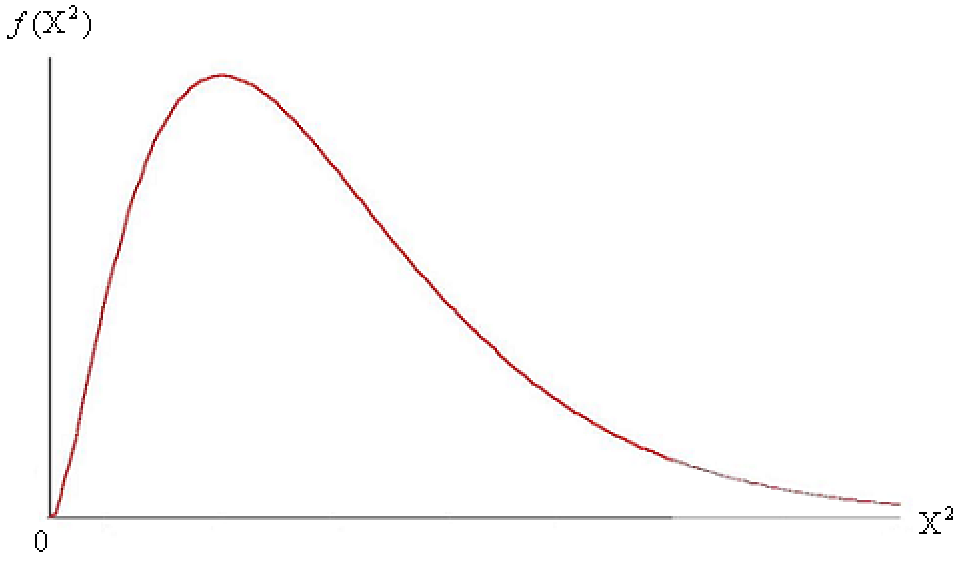
$z_{0.10} = 1{,}28$	$t_{0.10,\infty}\, 1{,}282$
$z_{0.05} = 1{,}645$	$t_{0.05,\infty} = 1{,}645$
$z_{0.025} = 1.96$	$t_{0.025,\infty} = 1{,}960$
$z_{0.01} = 2{,}33$	$t_{0.01,\infty} = 2{,}326$
$z_{0.005} = 2{,}575$	$z_{0.005,\infty} = 2{,}575$

10.2 X^2-verdeling

De kansdichtheidsfunctie van X^2 (chi kwadraat) is

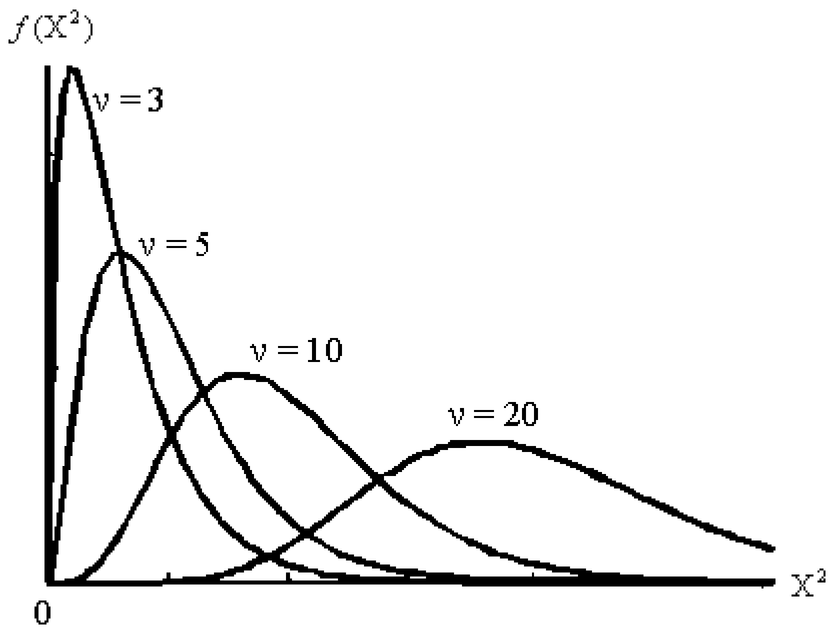
$$f(X^2) = \frac{1}{[(\nu/2)-1]!}\frac{1}{2^{\nu/2}}(X^2)^{(\nu/2)-1}e^{-X^2/2}$$

met $X^2 > 0$, de parameter *ν* is het aantal vrijheidsgraden dat, net als bij de Student's t-verdeling, invloed heeft op de vorm van de curve. De waarde van een X^2 ligt tussen de 0 en ∞, zoals in de onderstaande figuur te zien is.



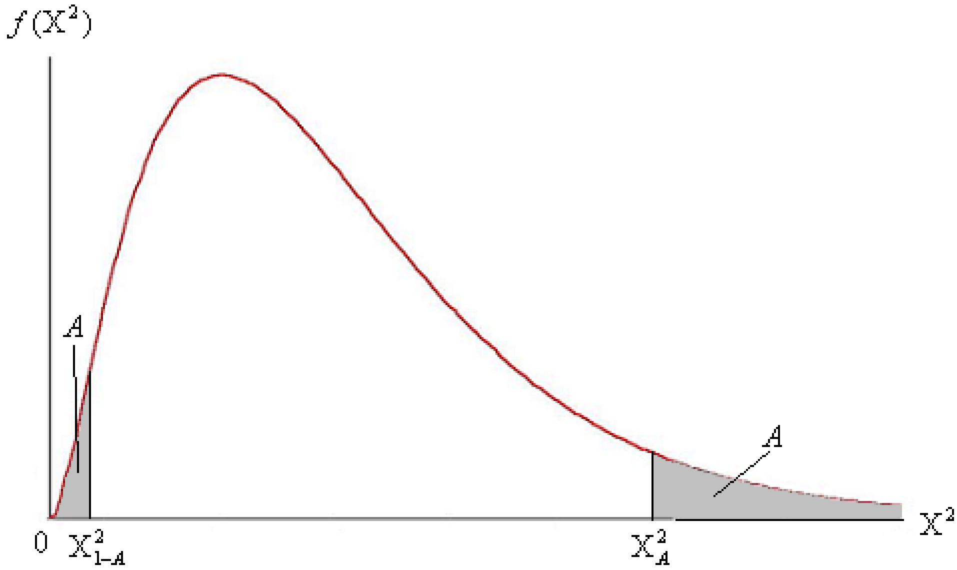
Figuur 10[c]. X^2-verdeling

In de onderstaande figuur is het effect te zien van een toename in de vrijheidsgraden.



Figuur 10[d]. X^2-verdelingen (bron: www.jrigol.com)

De waarde van X^2 met *v* vrijheidsgraden waar het gebied rechts onder de X^2-curve gelijk is aan *A* noteert men als $X^2_{A,\nu}$. De notatie - $X^2_{A,\nu}$ voor waarden links onder de X^2-curve gaat hier niet op, daar X^2 altijd groter is dan 0. Indien men het gebied links onder de X^2-curve aangeeft met *A* dan wordt het rechtergedeelte automatisch aangegeven met 1-*A*. De figuur hieronder geeft dit weer.



Figuur 10[e]. X_A^2 en X_{1-A}^2

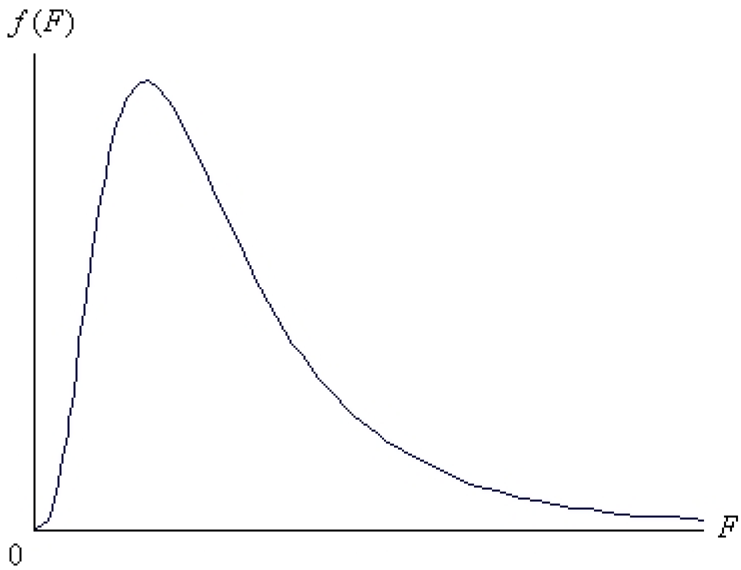
In Appendix A3 zijn de waarden te vinden die corresponderen met een X^2-verdeling. Als men bijvoorbeeld op zoek is naar een X^2-verdeling met 8 vrijheidsgraden en het gebied aan de rechterkant van de X^2-curve is gelijk aan 0,05, dan zoek men bij 8 vrijheidsgraden in de kolom aan de linkerkant en $X^2_{0.05}$ aan de bovenkant. Het nummer dat men dan vindt is 15,5073. Is echter het gedeelte aan de linkerkant onder de X^2-curve gelijk aan 0,05 dan is automatisch het rechtergedeelte onder de X^2-curve gelijk aan 0,95. Als me in de tabel zoekt naar 8 vrijheidsgraden en $X^2_{0.95}$ vindt men het getal 2,73264.

10.3 F-verdeling

De kansdichtheidsfunctie van een F-verdeling is als volgt:

$$f(F) = \frac{\left(\frac{\nu_1+\nu_2-2}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu_1-2}{2}\right)!\left(\frac{\nu_2-2}{2}\right)!}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\frac{F^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{\nu_1 F}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \quad \text{met } F>0$$

waar *F* een waarde heeft tussen de 0 en ∞ en ν_1 en ν_2 staan voor het aantal vrijheidsgraden. De onderstaande figuur geeft deze kansdichtheidsfunctie aan. De vorm van de curve wordt bepaald door de getallen van beide vrijheidsgraden.

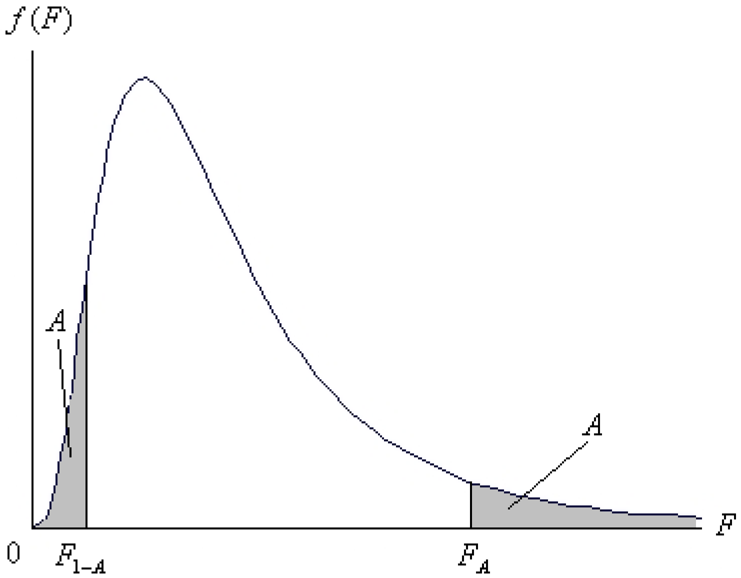


Figuur 10[f]. F-verdeling

Men definieert F_{A,v_1,v_2} als de waarde van *F* met v_1 en v_2 vrijheidgraden waar het gebeid rechtsonder de curve gelijk is aan *A*. Kortom,

$$P(F > F_{A,v_1,v_2}) = A$$

Doordat, net als bij de X^2-verdeling, de *F* variabele alleen maar positieve waarden kan hebben, definieert men F_{1-A,v_1,v_2} als een variabele waarvan het gebied aan de rechterkant gelijk is aan *A*. In de onderstaande figuur is dit uitgebeeld.



Figuur 10[9]. F_A en $F_{1\text{-}A}$

De tabellen in Appendix A4 geven de waarden weer van F_{A,ν_1,ν_2} voor *A* = 0,05, *A*=0,025 en *A*=0,01. De waarden van F_{1-A,ν_1,ν_2} zijn hier niet gegeven. Die zijn echter af te leiden van de waarden van F_{A,ν_1,ν_2}. Er geldt namelijk

$$F_{1-A,\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{F_{A,\nu_2,\nu_1}}$$

Om waarden te vinden in de tabellen zoekt men in de bovenste rij naar het aantal vrijheidsgraden ν_1 en in de meest linkerkolom naar het aantal vrijheidsgraden ν_2. Waar de getallen uit de bovenste rij en de meest linkerkolom elkaar kruisen, vindt men de waarden die men zoekt. Als men bijvoorbeeld op zoek is naar de waarden behorend bij $F_{0,05,5,7}$ dan zoket men in de bovenste rij naar vrijheidsgraden en in de meest linkerkolom naar 7 vrijheidsgraden. Kortom, $F_{0,05,5,7} = 3{,}97$. Draait men de vrijheidsgraden om, ν_1 = 7 en ν_2 = 5, dan krijgt men $F_{0,05,7,5} = 4{,}88$.
Is men op zoek naar de waarde corresponderend met ν_1 = 4 en ν_2 = 8 en het gebied aan de linkerkant is gelijk aan 0,05 (wat betekent dat het gebied aan de rechterkant gelijk is aan 0,95), dan komt men tot de volgende waarde:

$$F_{0,95,4,8} = \frac{1}{F_{0,05,8,4}} = \frac{1}{6{,}04} = 0{,}166$$